

ТЕМА: ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

План

1. Приклади задач лінійного програмування
2. Загальна математична модель лінійного програмування

Розглянемо кілька прикладів реальних задач, математичні моделі яких є задачами лінійного програмування.

Задача планування виробництва. Для виробництва товарів використовується деяка кількість різного роду ресурсів (сировина, знаряддя, праця тощо). Відомо, скільки одиниць кожного ресурсу використовується для виробництва одиниці кожного товару, запас кожного ресурсу, а також прибуток від реалізації одиниці кожного товару.

З економічної точки зору задача полягає в наступному: треба так запланувати виробництво товарів, щоб при використанні наявних ресурсів загальний прибуток від виробництва був найбільшим.

Складемо математичну модель задачі.

Нехай

m – кількість ресурсів, що використовуються у виробництві;

n – кількість товарів, що можуть вироблятися з наявних ресурсів;

a_{ij} – кількість одиниць i -го ресурсу, що використовується для виробництва j -го товару;

b_i – максимальна кількість одиниць i -го ресурсу, що можна використати у виробництві (запас одиниць i -го ресурсу);

c_j – прибуток від реалізації одиниці j -го товару;

x_j – кількість одиниць j -го товару, що планується виробити.

Загальна кількість одиниць i -го ресурсу, що використовується у виробництві згідно з планом, становить:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Очевидно, $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Прибуток, одержаний від виробництва x_j одиниць j -го товару, становить $c_j x_j$, а загальний прибуток від виробництва

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Отже, математична модель задачі є такою: знайти максимум лінійної форми

$$L = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Припустимо, що виконується умова балансу, тобто загальна кількість одиниць товару, який є в пунктах постачання, збігається з загальною кількістю одиниць товару, що потребують пункти споживання. Тоді з економічної точки зору задача формулюється таким чином: треба так запланувати перевезення товару з пунктів постачання в пункти споживання, щоб весь товар з пунктів постачання був вивезений, потреби всіх пунктів споживання були задоволені й водночас загальна вартість усіх перевезень була б мінімальною.

Нехай

c_{ij} – вартість перевезення одиниці товару з i -го пункту постачання A_i в j -тий пункт споживання B_j ;

З умови задачі випливає, що обсяги товару, що планується перевезти з пунктів постачання, задовольняють умови:

Для обсягів товару, що планується перевезти в пункти споживання, повинні виконуватися умови:

Очевидно, що $x_{ij} \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m$).

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} .$$
$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

3a уMOV

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$x_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n).$$

Задача складання раціону. Для відгодівлі худоби використовуються деякі корми, що містять у певній кількості поживні речовини. Відомо, скільки одиниць поживної речовини міститься в одиниці кожного корму, мінімальна потреба у кожній поживній речовині при відгодівлі худоби, а також вартість одиниці кожного корму.

З економічної точки зору задача полягає в наступному: треба так скласти добовий раціон для відгодівлі худоби, щоб задовольнялась мінімальна добова потреба в поживних речовинах і загальна вартість раціону була б мінімальною.

Складемо математичну модель задачі.

Нехай

m – кількість поживних речовин, що містяться в кормах;

n – кількість кормів, які використовуються для відгодівлі худоби;

a_{ij} – кількість одиниць i -тої поживної речовини, що міститься в одиниці j -го корму;

b_i – мінімальна добова потреба в i -тій поживній речовині при відгодівлі худоби;

c_j – вартість одиниці j -го корму;

x_j – кількість одиниць j -го корму, що планується використати в добовому раціоні (шукані величини).

Загальна кількість i -тої поживної речовини, яка міститься в кормах раціону, становить:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = 1, \dots, m).$$

Оскільки ця кількість одиниць не може бути меншою, ніж добова потреба в i -й поживній речовині, то:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Очевидно, що $x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$.

Вартість x_j одиниць j -го корму становить $c_j x_j$, а загальна вартість добового раціону

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Отже, математична модель задачі є такою: знайти мінімум лінійної форми

$$L = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Задача про оптимальне завантаження обладнання. Нехай підприємству задано план $(N_1, N_2, \dots, N_n)$ з випуску продукції $P_1, P_2, \dots, P_n$ за деякий час T . Продукція обробляється m взаємозамінним устаткуванням $B_1, B_2, \dots, B_m$ з різними потужностями. Задаються такі величини: a_{ij} – норми часу на обробку одиниці продукції i -го виду на j -му устаткуванні; A_j – фонд часу j -го типу устаткування; N_i – план випуску продукції i -го виду; c_{ij} – собівартість обробки i -го виду продукції на j -му устаткуванні.

Треба так спланувати випуск продукції P_j , щоб її вартість була найменшою і план з випуску продукції було виконано.

Для побудови математичної моделі задачі позначимо через x_{ij} кількість продукції i -го виду, яка обробляється на j -му устаткуванні.

Фактичні витрати часу на обробку всієї продукції не можуть перевищувати відведені фонди, тому

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \leq A_j \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Оскільки план має виконуватися, то:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = N_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Загальна вартість оброблюваної продукції визначається формулою

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}.$$

Остаточно математичну модель задачі формулюємо так: знайти найменше значення функції

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

за таких обмежень

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \leq A_j \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = N_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}).$$

Характер моделей може змінюватися залежно від постановки задачі. Наприклад, якщо припустити, що план з випуску продукції перевиконується, то обмеження набувають вигляду:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \geq N_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Якщо задані пропорції між видами продукції в кінцевому валовому продукті й необхідно випустити максимальний обсяг продукції Z , то обмеження й цільова функція набувають вигляду:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = k_i z \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1,$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m),$$

$$Z \rightarrow \max,$$

де k_i – частка i -го виду продукції в загальному обсязі Z . Можливі й інші варіанти цієї задачі.

Задача про раціональний розкрій матеріалів. Модель даної задачі має важливе значення для економії матеріалів і сировини. Розглянемо постановку задачі. Значна частина матеріалів надходить на підприємство у вигляді певних одиниць стандартних розмірів. Для виробничого використання його доводиться розрізати на частини, щоб одержати заготовки необхідної величини та форми. Виникає проблема мінімізації відходів матеріалів.

Запишемо математичну постановку задачі. Позначимо через m кількість різних заготовок; B_i – план випуску заготовок i -го виду; n – кількість різних способів розкрою стандартного матеріалу; b_{ij} – кількість заготовок (кількість одиниць) i -го виду, одержаних за допомогою j -го способу розкрою; c_j – величина відходів при j -му способі розкрою.

За невідому x_j беремо величину вихідного матеріалу, яку потрібно розрізати j -тим способом, через Z позначимо загальну кількість відходів. Кількість заготовок i -го виду запишемо у вигляді

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n = B_i.$$

Тому математична модель задачі має вигляд:

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = B_1,$$

$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = B_2,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n = B_m,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (\min).$$

Характер моделі може змінитися, якщо в умові задати іншу мету. Наприклад, якщо ставиться задача про одержання заданої кількості заготовок із найменшої кількості вихідного матеріалу, то цільова функція має вигляд

$$Z = \min(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Моделі розглянутих задач належать до класу задач лінійного програмування, оскільки до моделей усі невідомі входять у першому степені.

Усі моделі задач складаються з двох частин: у першій – записують рівняння чи нерівності, які мають задовольняти реальні плани задачі, у

Загальна лінійна математична модель економічних процесів і явищ – задача лінійного програмування (ЛП) подається у вигляді: знайти максимум (мінімум) функції

за умов

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Якщо якесь b_i від'ємне, то, помноживши i -те обмеження на (-1) , дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли i -те обмеження має вигляд нерівності

то останню завжди можна звести до рівності, увівши допоміжну змінну x_{n+1} :

Аналогічно обмеження вигляду

Зводимо до рівності, віднімаючи від лівої частини допоміжну змінну x_{n+2} , тобто:

Задачу лінійного програмування зручно записувати у векторно-матричному вигляді, наприклад:

3a yMOB

$$X \geq 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Загальна задача лінійного програмування (1) – (3) геометрично інтерпретується так: кожне i -те обмеження, що має вигляд рівняння

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i,$$

в n -вимірному просторі основних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ задає гіперплощину. Кожному обмеженню вигляду (2) і (3) відповідають гіперплощина та півпростір, який лежить по один бік від цієї гіперплощини. У перетині всіх півпросторів, що визначаються обмеженнями задачі (2) і (3), утворюється опуклий багатогранник її допустимих розв'язків.

Цільову функцію

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

в n -вимірному просторі основних змінних можна геометрично інтерпретувати як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значеннями параметра Z .